




INTEGRALES DEFINIDAS Y CÁLCULOS DE ÁREAS

CÁLCULO AUTOMÁTICO DE INTEGRALES DEFINIDAS

La integral de una función definida puede obtenerse en DERIVE tecleando el icono Cálculo integral, , También puede obtenerse desplegando la opción Cálculo/Integrales... de la barra de menús, tecleando CTRL+May+I o introduciendo directamente la expresión $\text{INT}(f(x), x, a, b)$ para la integral definida entre $x = a$ y $x = b$.

PROCEDIMIENTO

Se introduce la función, luego se resalta, se pulsa el icono Cálculo integral , en Variable ponemos la que corresponda, en Integral activamos Definida y en Límite Superior y Límite Inferior escribimos los límites de integración. Finalizamos con Simplificar. Si queremos que aparezca el resultado en notación decimal pulsamos sobre el icono . Si en los límites de Integración queremos introducir constantes como π , e etc. las seleccionamos de la barra que está en la parte inferior de la pantalla de Derive.

$$\#1: \frac{x^2}{(x^3 + 4)^{1/2}}$$



$$\#2: \int_1^2 \frac{x^2}{(x^3 + 4)^{1/2}} dx$$

$$\#3: \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{3} - \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{3}$$

$$\#4: 0.8186890917$$

Cálculo de Áreas

1.) Calcular el área comprendida entre la gráfica de una función y el eje de abscisas en un intervalo $[a, b]$

A continuación se exponen las distintas opciones que podemos hacer con Derive teniendo en cuenta que todas las expresiones se pueden escribir en minúsculas y que la mejor manera de visualizar las expresiones y las gráficas correspondientes es activar en el menú Ventana de la Ventana de

Álgebra la opción Mosaico Vertical para poder ver las dos ventanas (Texto y Gráficos).

1.1. Área bajo la curva y encima del Eje.

Ejemplo:

1.) Determine el área bajo la curva $f(x) = \cos x$, y por encima del eje de las abscisas en el intervalo. $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

Procedimiento:

a) Introducimos en la ventana de Álgebra la expresión: $f(x) = \cos x$

#1: $f(x) := \cos(x)$

b) Activamos el menú Resolver/Expresión... en Método se coloca algebraico, en Dominio Real y luego Resolver. (Esto es para determinar los puntos de cortes de la función con el eje).

#2: $\text{SOLUE}(\cos(x), x, \text{Real})$

#3: $x = \frac{3 \cdot \pi}{2} \vee x = -\frac{\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{2}$

Todas las demás soluciones, que son infinitas, se obtienen sumando o restando múltiplos de $n \cdot \pi$ (siendo $n \pm 1, 2, 3, \dots$)

c) Se gráfica el área solicitada con la siguiente expresión:



AreaUnderCurve (f (x), x, a, b) Sombrea el área bajo la gráfica de la función f (x) hasta el eje OX en el intervalo [a, b] ($a < b$).

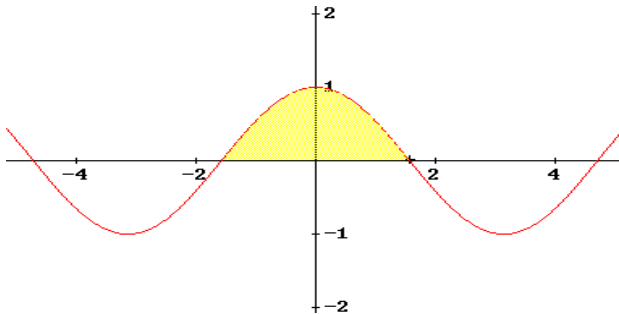
Escribimos lo anterior en la ventana de Álgebra sustituyendo f (x), a y b por los valores correspondientes: AreaUnderCurve (cosx, x, $-\pi/2$, $3\pi/2$)

#4: $\text{AreaUnderCurve} \left(\cos(x), x, -\frac{\pi}{2}, \frac{3 \cdot \pi}{2} \right)$

d) Se activa el icono  para que se efectúe el cálculo.

#5: $\left[\cos(x), y < \cos(x) \wedge 0 < y \wedge -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3 \cdot \pi}{2} \right]$

Posteriormente, con la expresión ya calculada seleccionada pulsamos sobre el icono  para ir a la Ventana-2D y allí volvemos a pulsar sobre el icono  para que se sombree el área correspondiente, obteniendo la gráfica.



Se observa en la gráfica el área buscada, (área resaltada), cuyos cortes con el eje son $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$, que están en el intervalo dado, y estos a su vez representan los límites de integración.

e) Ahora se calcula el valor de esa área, con la integral definida:

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

$$\#6: \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x) dx$$

$$\#7: 2$$

1.2.) Área encima de la curva y debajo del Eje

Ejemplo:

2.) Determine el área encima de la curva $f(x) = \cos x$, y por debajo el eje de las abscisas en el intervalo. $[-4, 4]$

El procedimiento en los primeros pasos es similar al 1.1.

$$\#8: f(x) := \cos(x)$$

$$\#9: \text{SOLVE}(f(x) := \cos(x), x, \text{Real})$$

$$\#10: x = \frac{3 \cdot \pi}{2} \vee x = -\frac{\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{2}$$

Todas las demás soluciones, que son infinitas, se obtienen sumando o restando múltiplos de $n \cdot \pi$ (siendo $n \pm 1, 2, 3, \dots$)

Se gráfica el área solicitada con la siguiente expresión:



AreaOverCurve (f(x), x, a, b) Sombrea el área sobre la gráfica de la función f(x) hasta el eje OX en el intervalo $[a, b]$ ($a < b$).

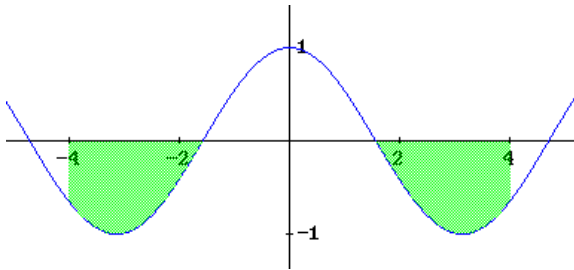
Escribimos lo anterior en la ventana de Álgebra substituyendo f (x), a y b por los valores correspondientes: AreaOverCurve (cosx, x, -4 ,4)

AreaOverCurve (COS(x), x, -4, 4)

#11: AreaOverCurve(COS(x), x, -4, 4)

#12: [COS(x), COS(x) < y ^ y < 0 ^ -4 ≤ x ≤ 4]

Posteriormente, con la expresión ya calculada seleccionada pulsamos sobre el icono  para ir a la Ventana-2D y allí volvemos a pulsar sobre el icono  para que se sombree el área correspondiente, obteniendo la gráfica.



Se observa en la gráfica las áreas buscadas, (áreas resaltadas), que están en el intervalo dado, y los límites de integración son: de -4 a $-\frac{\pi}{2}$ y de $\frac{\pi}{2}$ a 4

e) Ahora se calcula el valor de esa área con la integral definida:

$$A = A_1 + A_2 \Rightarrow A = -\int_{-4}^{-\frac{\pi}{2}} \cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^4 \cos x dx$$
 se copia en derive la expresión:

$$-\text{INT}(\text{COS}(x), x, -4, -\pi/2) - \text{INT}(\text{COS}(x), x, \pi/2, 4)$$

#13: $-\int_{-4}^{-\pi/2} \text{COS}(x) dx - \int_{\pi/2}^4 \text{COS}(x) dx$

#14: $2 - 2 \cdot \text{SIN}(4)$

#15: 3.513604990

1.3.) Ambas áreas

Ejemplo:

3.) Determine el área bajo la curva $f(x) = \text{sen}x \cos x$, y el eje de las abscisas en el intervalo. $[-3, 3]$

El procedimiento en los primeros pasos es similar a los casos anteriores

#16: $f(x) := \text{SIN}(x) \cdot \text{COS}(x)$

#17: `SOLVE(f(x) := SIN(x) * COS(x), x, Real)`

#18: $x = \frac{3 \cdot \pi}{2} \vee x = -\frac{\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{2} \vee x = -\pi \vee x = \pi \vee x = 0$

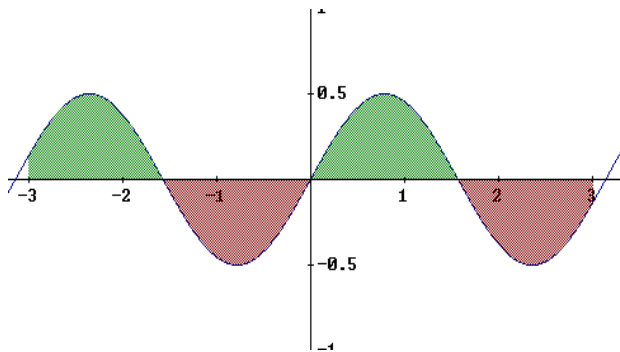
Se gráfica el área solicitada con la siguiente expresión: `PlotInt (f (x), x, a, b)` Sombrea el área comprendida entre la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX en el intervalo $[a, b]$ ($a < b$).

Escribimos lo anterior en la ventana de Álgebra sustituyendo $f(x)$, a y b por los valores correspondientes: `PlotInt (senxcosx, x, -3, 3)`

#19: `PlotInt(SIN(x) * COS(x), x, -3, 3)`

#20: `[SIN(x) * COS(x), y < SIN(x) * COS(x) ^ 0 < y ^ -3 ≤ x ≤ 3, SIN(x) * COS(x) < y ^ y < 0 ^ -3 ≤ x ≤ 3]`

A esa expresión #20, se le aplica el procedimiento similar antes explicado, para obtener la gráfica



Se observa en la gráfica las áreas buscadas, (áreas resaltadas), Derive sombrea de distinto color el área que queda por encima del eje OX del área que queda por debajo del eje OX.

Los límites de integración son:

de -3 a $-\frac{\pi}{2}$; de $-\frac{\pi}{2}$ a 0 ; de 0 a $\frac{\pi}{2}$; de $\frac{\pi}{2}$ a 3

e) Ahora se calcula el valor del área total con la integral definida:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

$$A = \int_{-3}^{-\frac{\pi}{2}} \text{senx cos x dx} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \text{senx cos x dx} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{senx cos x dx} - \int_{\frac{\pi}{2}}^3 \text{senx cos x dx}$$

Se copia en derive la expresión:

$$\text{INT (SIN(x) COS(x), x, -3, -\pi/2)} - \text{INT (SIN(X) COS(x), x, -\pi/2, 0)$$

$$+ \text{INT (SIN(x) COS(x), x, 0, \pi/2)} - \text{INT (SIN(X) COS(x), x, \pi/2, 3)$$

$$\#21: \int_{-3}^{-\pi/2} \sin(x) \cdot \cos(x) \, dx - \int_{-\pi/2}^0 \sin(x) \cdot \cos(x) \, dx + \int_0^{\pi/2} \sin(x) \cdot \cos(x) \, dx - \int_{\pi/2}^3 \sin(x) \cdot \cos(x) \, dx$$

$$\#22: \frac{\cos(6)}{2} + \frac{3}{2}$$

$$\#23: 1.980085143$$

2.) Área comprendida entre la gráfica de dos funciones

Ejemplo:

4.) Determine el área de la región comprendida entre las graficas de las funciones $f(x) = 3x^3 - x^2 - 10x$; $g(x) = -x^2 + 2x$

Procedimiento:

a) se introducen las funciones respectivas en Derive.

$$\#1: f(x) := 3 \cdot x^3 - x^2 - 10 \cdot x$$

$$\#2: g(x) := -x^2 + 2 \cdot x$$

b) Buscamos los cortes entre las curvas e igualando ambas.

$$\#3: f(x) = g(x)$$

$$\#4: 3 \cdot x^3 - x^2 - 10 \cdot x = -x^2 + 2 \cdot x$$

Resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones. Estando en la Ventana de Álgebra activamos el menú Resolver y dentro de él la opción Expresión, en Variable: (x), en método: Algebraico y en dominio: Real finalizamos con Resolver



Y Derive nos devuelve las soluciones de la forma:

#5: SOLVE($3 \cdot x^3 - x^2 - 10 \cdot x = 2 \cdot x - x^2$, x, Real)

#6: $x = -2 \vee x = 2 \vee x = 0$

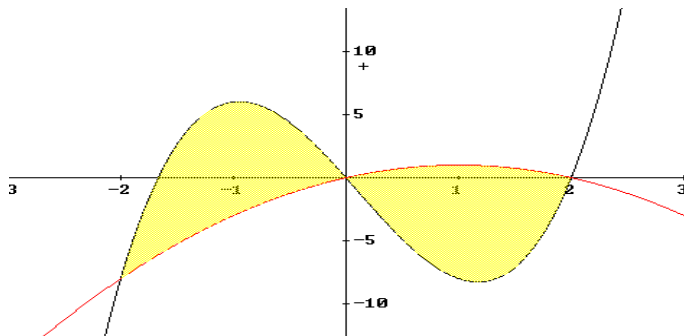
Entonces, las gráficas se cortan en los puntos de abscisa $x = -2; x = 0; x = 2$

c) Se gráfica el área solicitada con la siguiente expresión:
AreaBetweenCurves (f(x), g(x), x, a, b) Sombrea el área comprendida entre las gráficas de las funciones f(x) y g(x) desde $x = a$ hasta $x = b$ ($a < b$).
Escribimos lo anterior en la ventana de Álgebra sustituyendo f(x), g(x) a y b por los valores correspondientes: AreaBetweenCurves ($3x^3 - x^2 - 10x, 2x - x^2, x, -2, 2$)

#7: AreaBetweenCurves($3 \cdot x^3 - x^2 - 10 \cdot x, 2 \cdot x - x^2, x, -2, 2$)

#8: $[3 \cdot x^3 - x^2 - 10 \cdot x, 2 \cdot x - x^2, x \leq 2 \wedge -2 \leq x \wedge (x^2 - 2 \cdot x + y) \cdot (3 \cdot x^3 - x^2 - 10 \cdot x - y) > 0]$

A esa expresión #8, se le aplica el mismo procedimiento antes explicado, para obtener la gráfica



Se observa las áreas resaltadas como solución gráfica, Los límites de integración son: de -2 a 0 ; de 0 a 2

e) Ahora se calcula el valor del área total con la integral definida:

$$A = A_1 + A_2$$

$$A = \int_{-2}^0 [f(x) - g(x)] dx + \int_0^2 [g(x) - f(x)] dx$$

Se copia en Derive: INT (f(x) - g(x), x, -2, 0) + INT (g(x) - f(x), x, 0, 2)

#9: $\int_{-2}^0 (f(x) - g(x)) dx + \int_0^2 (g(x) - f(x)) dx$

#10: 24

Ejemplo:

5.) Determine el área comprendida entre las curvas $N(x) = \cos x$; $M(x) = \sin x$, en el intervalo. $[-\pi, \frac{3\pi}{2}]$

Procedimiento similar a los anteriores

#11: $M(x) := \text{SIN}(x)$

#12: $N(x) := \text{COS}(x)$

#13: $N(x) = M(x)$

#14:

$$\text{COS}(x) = \text{SIN}(x)$$

#15: $\text{SOLVE}(\text{COS}(x) = \text{SIN}(x), x, \text{Real})$

#16:

$$x = \frac{5 \cdot \pi}{4} \vee x = -\frac{3 \cdot \pi}{4} \vee x = \frac{\pi}{4}$$

Entonces, las gráficas se cortan en los puntos de abscisa $x = \frac{5\pi}{4}$; $x = \frac{\pi}{4}$; $x = -\frac{3\pi}{4}$

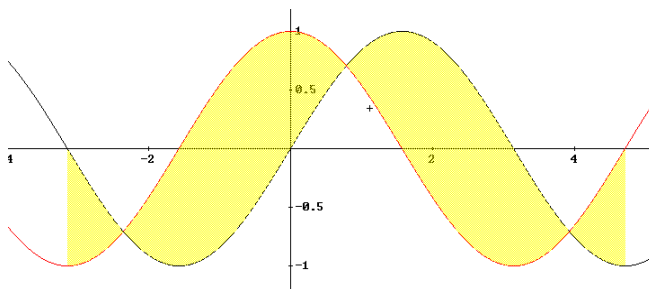
Todas las demás soluciones, que son infinitas, se obtienen sumando o restando múltiplos de $n \cdot \pi$ (siendo $n \pm 1, 2, 3, \dots$)

Nota: Como ya están definidas las funciones en Derive como $M(x)$ y $N(x)$, también se puede escribir el área entre curvas de la manera siguiente:

AreaBetweenCurves (M(x), N(x), x, 0, 2π)

#17: $\text{AreaBetweenCurves} \left(M(x), N(x), x, -\pi, \frac{3 \cdot \pi}{2} \right)$

#18: $\left[\text{SIN}(x), \text{COS}(x), x \leq \frac{3 \cdot \pi}{2} \wedge -\pi \leq x \wedge \text{COS}(x) \cdot (y - \text{SIN}(x)) + y \cdot \text{SIN}(x) - y^2 > 0 \right]$



Se observa las áreas resaltadas como solución gráfica, Los límites de integración son: de $-\pi$ a $-\frac{3\pi}{4}$; de $-\frac{3\pi}{4}$ a $\frac{\pi}{4}$; de $\frac{\pi}{4}$ a $\frac{5\pi}{4}$; de $\frac{5\pi}{4}$ a $\frac{3\pi}{2}$

Ahora se calcula el valor del área total con la integral definida:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

$$A = \int_{-\pi}^{-\frac{3\pi}{4}} [M(x) - N(x)] dx + \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} [N(x) - M(x)] dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} [M(x) - N(x)] dx + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} [N(x) - M(x)] dx$$

Se copia en Derive

INT (M(x)-N(x),x,-pi,-3pi/4)+INT(N(x)-M(x),x,-3pi/4,pi/4)+INT(M(x)-N(x),x,pi/4,5pi/4)+INT(N(x)-M(x),x,5pi/4,3pi/2

$$\#19: \int_{-\pi}^{-3 \cdot \pi/4} (M(x) - N(x)) dx + \int_{-3 \cdot \pi/4}^{\pi/4} (N(x) - M(x)) dx + \int_{\pi/4}^{5 \cdot \pi/4} (M(x) - N(x)) dx + \int_{5 \cdot \pi/4}^{3 \cdot \pi/2} (N(x) - M(x)) dx$$

#20:

$$6 \cdot \sqrt{2} - 2$$

#21:

$$6.485281374$$

3.) Otros tipos de áreas

Ejemplo:

6.) Determinar el área dentro del círculo $x^2 + y^2 = 16$, y encima de la parábola $x^2 = 12(y-1)$

Procedimiento:

a) Introducimos la expresión $x^2 + y^2 = 16$, en Derive: $x^2 + y^2 = 16$

$$\#1: x^2 + y^2 = 16$$

b) Despejamos el variable y.

Ventana de Álgebra activamos el menú Resolver y dentro de él la opción Expresión, en Variable: (y), en método: Algebraico y en dominio: Real finalizamos con Resolver

$$\#2: \text{SOLVE}(x^2 + y^2 = 16, y, \text{Real})$$

$$\#3: y = -\sqrt{(16 - x^2)} \vee y = \sqrt{(16 - x^2)}$$

c) Introducimos la expresión, $x^2 = 12(y-1)$ en Derive

$$\#4: x^2 = 12 \cdot (y - 1)$$

d) Despejamos el variable y.

$$\#5: \text{SOLVE}(x^2 = 12 \cdot (y - 1), y, \text{Real})$$

$$\#6: y = \frac{x^2 + 12}{12}$$

c) Buscamos los puntos de intercepción entre las curvas para saber los límites de integración. $\sqrt{16-x^2} = \frac{x^2+12}{12}$

$$\#7: \sqrt{(16-x^2)} = \frac{x^2+12}{12}$$

$$\#8: \text{SOLVE} \left(\sqrt{(16-x^2)} = \frac{x^2+12}{12}, x, \text{Real} \right)$$

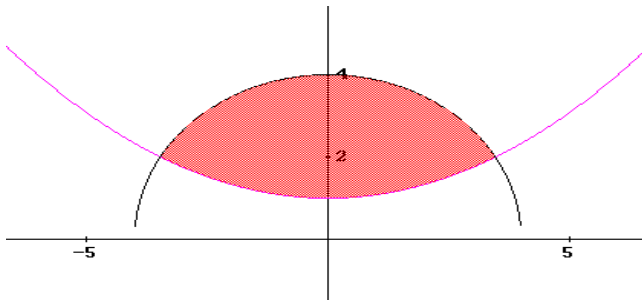
$$\#9: \quad \quad \quad x = -2\sqrt{3} \vee x = 2\sqrt{3}$$

Entonces los límites de integración son: $Lím Inf = -2\sqrt{3}$ $Lím Sup = 2\sqrt{3}$

d) Para graficar el área entre las curvas se copia en derive

$$\#10: \text{AreaBetweenCurves} \left(\frac{x^2+12}{12}, \sqrt{(16-x^2)}, x, -2\sqrt{3}, 2\sqrt{3} \right)$$

$$\#11: \left[\frac{x^2+12}{12}, \sqrt{(16-x^2)}, x \leq 2\sqrt{3} \wedge -2\sqrt{3} \leq x \wedge \frac{(\sqrt{(16-x^2)}-y) \cdot (12 \cdot (y-1) - x^2)}{12} > 0 \right]$$



Se observa el área resaltada como solución gráfica que cumple con las condiciones del ejercicio

e) Ahora se calcula el valor del área total con la integral definida:

$$A = \int_a^b (\text{Curva de arriba} - \text{Curva de abajo}) dx$$

$$A = \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} (\sqrt{16-x^2} - \frac{x^2+12}{12}) dx$$

$$\text{INT} (\text{sqrt}(16-x^2) - (x^2+12)/12, x, -2\text{sqrt}3, 2\text{sqrt}3)$$

$$\#12: \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \left(\sqrt{(16-x^2)} - \frac{x^2+12}{12} \right) dx$$

#13:

$$\frac{4 \cdot (4 \cdot \pi - \sqrt{3})}{3}$$

#14:

14.44575974

Ejemplo:

7.) Calcular el área comprendida entre la recta $x=0$ dentro de círculo $x^2 + y^2 = 8$ y fuera de la parábola $y^2 = 2x$

#15: $x^2 + y^2 = 8$

#16: SOLVE($x^2 + y^2 = 8$, y, Real)

#17:

$$y = -\sqrt{(8 - x^2)} \vee y = \sqrt{(8 - x^2)}$$

#18: $y^2 = 2 \cdot x$

#19: SOLVE($y^2 = 2 \cdot x$, y, Real)

#20:

$$y = -\sqrt{2} \cdot \sqrt{x} \vee y = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x}$$

#21: $-\sqrt{(8 - x^2)} = -\sqrt{2} \cdot \sqrt{x}$

#22: SOLVE($-\sqrt{(8 - x^2)} = -\sqrt{2} \cdot \sqrt{x}$, x, Real)

#23:

$$x = -4 \vee x = 2$$

#24: $-\sqrt{(8 - x^2)} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x}$

#25: SOLVE($-\sqrt{(8 - x^2)} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x}$, x, Real)

#26:

false

#27: $\sqrt{(8 - x^2)} = -\sqrt{2} \cdot \sqrt{x}$

#28: SOLVE($\sqrt{(8 - x^2)} = -\sqrt{2} \cdot \sqrt{x}$, x, Real)

#29:

false

Esto indica que no hay cortes entre las curvas dadas.

#30: $\sqrt{(8 - x^2)} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x}$

#31: SOLVE($\sqrt{(8 - x^2)} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x}$, x, Real)

#32:

$$x = -4 \vee x = 2$$

Como el área buscada está limitada por la recta $x=0$ los límites de integración son $Lím Inf = 0$ $Lím Sup = 2$

Para graficar una parte de la solución empleamos esta orden en Derive

#33: $\text{AreaBetweenCurves}(-\sqrt{8-x^2}, -\sqrt{2}\cdot\sqrt{x}, x, 0, 2)$

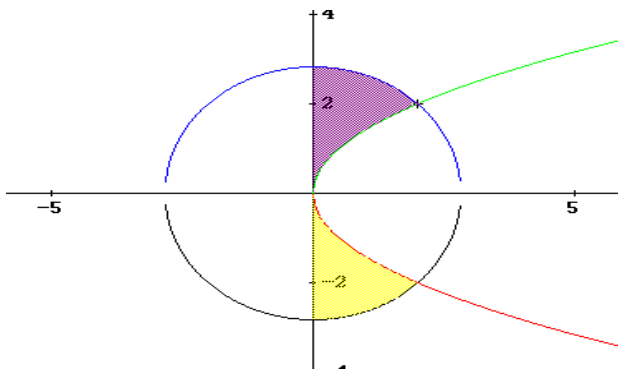
#34: $[-\sqrt{8-x^2}, -\sqrt{2}\cdot\sqrt{x}, x \leq 2 \wedge 0 \leq x \wedge -(\sqrt{8-x^2} + y) \cdot (\sqrt{2}\cdot\sqrt{x} + y) > 0]$

Y para la otra parte esta orden

#35: $\text{AreaBetweenCurves}(\sqrt{8-x^2}, \sqrt{2}\cdot\sqrt{x}, x, 0, 2)$

#36: $[\sqrt{8-x^2}, \sqrt{2}\cdot\sqrt{x}, x \leq 2 \wedge 0 \leq x \wedge (y - \sqrt{2}\cdot\sqrt{x}) \cdot (\sqrt{8-x^2} - y) > 0]$

Y se obtiene las áreas solicitadas gráficamente



Ahora se calcula el valor del área total con la integral definida:

$$A = \int_0^2 (\sqrt{8-x^2} - \sqrt{2x}) dx + \int_0^2 (-\sqrt{2x} - (-\sqrt{8-x^2})) dx$$

INT (sqrt (8 - x^2)-sqrt (2x), x, 0, 2) +INT (-sqrt (2x) + (sqrt (8 - x^2)), x, 0, 2)

#37: $\int_0^2 (\sqrt{8-x^2} - \sqrt{2}\cdot\sqrt{x}) dx + \int_0^2 (-\sqrt{2}\cdot\sqrt{x} + \sqrt{8-x^2}) dx$

#38: $2 \cdot \pi - \frac{4}{3}$

#39: 4.949851973

Nota: Como las áreas son simétricas también podemos utilizar la siguiente expresión para calcular el área total $A = 2 \int_0^2 (\sqrt{8-x^2} - \sqrt{2x}) dx$

#40: $2 \cdot \int_0^2 (\sqrt{8-x^2} - \sqrt{2}\cdot\sqrt{x}) dx$

#41: $\frac{2 \cdot (3 \cdot \pi - 2)}{3}$

#42: 4.949851973

Dámaso Rojas
 Julio 2007